

# MATEMATIKA 11. osztály

## I. KOMBINATORIKA

### Kombinatorika

#### *Ismétlés nélküli permutáció*

- Öt diák (A, B, C, D, E) elmegy moziba, és egymás mellé kapnak jegyeket.
  - Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé?
  - Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C mindenképp egymás mellé szeretne ülni?
  - Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C semmiképp sem szeretne egymás mellé szeretne ülni?
  - Az 5 diák mozi után cukrászdába megy, s egy kör alakú asztal köré ülnek. Hányféleképpen foglalhatnak helyet?
- Matekból, irodalomból, történelemből és informatikából kell házi feladatot készítenem. Hányféle sorrendben tehetem ezt meg?
- Hat lány és 5 fiú együtt megy el a színházba. A jegyek egymás mellé szólnak.
  - Hányféleképpen ülhetnek le?
  - Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha fiú fiú mellé, lány lány mellé nem ülhet?
- Négy házaspár lép be egy szobába, az ajtón egyszerre legfeljebb egy ember tud belépni.
  - Hányféle sorrendben juthatnak be a szobába?
  - Hányféle sorrendben mehetnek be, ha két egymást követő belépő ember csak különböző nemű lehet?
  - Hányféle sorrendben mehetnek be, ha nő az első, és minden nőt a férje követ?
- András, Balázs, Csaba, Dénes, Endre és Ferenc egy koncerten egymás mellett foglalnak helyet. András és Ferenc úgy döntenek, hogy egymás mellé ülnek.
  - Hányféleképp ülhet le a társaság?
  - Hányféleképp ülhetnek le, ha András és Ferenc semmiképp sem akarnak egymás mellé ülni?
  - Koncert után beülnek egy étterembe, ahol kör alakú asztalnál vacsoráznak. Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha bárki bárki mellé ülhet?
  - Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha András és Ferenc még mindig nem szeretnék egymás mellett ülni?
  - Hányféleképp ülhetnek le az étteremben, ha András, Balázs és Csaba valamilyen sorrendben egymás mellett akarnak vacsorázni?
- 8 lányból és 10 fiúból hányféleképpen lehet összeállítani a lehető legtöbb egyszerre táncoló párt?

#### *Ismétléses permutáció*

- Egy 10 fős társaság 3 tiramisut, 4 dobostortát, 2 gesztenyepürét és 1 somlói galuskát rendel. Hányféleképpen oszthatja ki a felszolgáló az édességeket, ha nem tudja, ki mit rendelt?
- Hányféle sorrendben írhatók le a MATEMATIKA szó betűi?
- Hányféle sorrendben írhatók le a MAGYARORSZÁG szó betűi?

10. Jocónak 3 egyforma fekete, 2 egyforma kék, 2 egyforma zöld és egy csíkos nyakkendője van. Hányféleképp viselheti ezeket 8 napon át, ha egy-egy napon egy nyakkendőt használ, és minden nap másikat?
11. Hányféle hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számjegyekből?
12. Hányféle kilencjegyű, 5-tel osztható szám készíthető a 0, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6 számjegyekből?

#### *Ismétlés nélküli variáció*

13. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó arany-, ezüst- és bronzérmeket?
14. Hány olyan ötjegyű szám van, amiben minden számjegy különböző?
15. 10-féle sütemény van az asztalon. Négy darab különböző süteményt szeretnénk enni. Hányféleképpen lehetséges ez?
16. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. Ezek tulajdonosai között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképp történhet ez?
17. Egy 36 fős osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy minden tanuló csak egy tárgyat kaphat. Hányféleképp végződhet a sorsolás?
18. Nyolcféle fagyalaltból három különböző ízűt választunk egy tölcsérbe. Hányféleképp történhet ez?

#### *Ismétléses variáció*

19. Az étteremben 5-féle főétel közül választhatunk, bármelyikből nagy mennyiség áll rendelkezésre. Egy 8 főből álló társaság hányféleképpen választhat belőlük egy-egy ételt, ha elvileg minden ételt mindenki szívesen elfogyaszt?
20. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1-es totószelvényt?
21. Hány ötjegyű szám van?
22. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?
23. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat, ha egy tanuló több tárgyat is kaphat?
24. Tízféle fagyalaltból választunk 4 gombócot egy tölcsérbe, egy féléből többet is választhatunk. Hányféleképp alakulhat a tölcsér tartalma?
25. 1990 előtt két betű – négy szám típusú rendszámuk volt a gépjárműveknek. Hányféle rendszám volt létrehozható, ha a magyar ábécé 26 egyjegyű betűjét és bármilyen számjegyet használhatunk fel?
26. Hányféle három betű – három szám típusú rendszámot lehet létrehozni?

## *Ismétlés nélküli kombináció*

27. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó egyforma oklevelet?
28. Egy 30 fős osztályból hányféleképpen lehet kiválasztani két diákönkormányzati képviselőt?
29. Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötös lottószelvényt?
30. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk. Hányféleképpen lehetséges ez?
31. Háromféle gyümölcsből szeretnénk 1-1 kg-ot vásárolni a piacon, ahol a gyümölcsök közül almát, körtét, sárgadinnyét, szilvát és őszibarackot árulnak. Hányféleképp végződhet a vásárlás?
32. Húsz ismerősünk közül tízet szeretnénk buliba hívni. Hányféleképp tehetjük ezt meg?
33. Egy 36 fős osztályból három diákot választunk, akik szerepelnek egy iskolai ünnepségen. Hányféleképp történhet a válogatás?
34. 12-féle fagyalaltból 5 különböző ízű gombócot választunk egy fagyalaltkehelybe. A gombócok elhelyezkedése a kehelyben közömbös számunkra. Hányféleképp történhet ez?
35. Egy szálláson 2 db 5 ágyas, 1db 4 ágyas és 1 db 3 ágyas szobában száll meg 17 diák. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a szobákban, ha egy szobában levő férőhelyek között nem teszünk különbséget?

## II. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

36. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával dobott szám
  - a) legalább 5?
  - b) prím?
  - c) páros prím?
  - d) legfeljebb 4?
  - e) legalább 6?
37. Mennyi a valószínűsége, hogy két szabályos dobókockával dobva a dobott pontok összege
  - a) 10?
  - b) legalább 10?
  - c) legfeljebb 4?
  - d) 4-nél kevesebb?
38. A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy
  - a) nincs köztük ász?
  - b) van köztük ász?
  - c) nincs köztük a piros ász?
  - d) köztük van a piros ász?
39. Öt diák (A, B, C, D, E) egy találkozót beszél meg egy helyen. Ha feltételezzük, hogy nem érkezhetsz egy időben több ember, mennyi a valószínűsége, hogy
  - a) nevük abc-rendjében érkeznek?
  - b) elsőnek C érkezik?
  - c) B után C érkezik?

### III. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

#### Törtkitevőjű hatvány

40. Tankönyv

#### Exponenciális függvények

41. Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

a)  $f(x) = 2^x$ ;

b)  $f(x) = 3^x$ ;

c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;

d)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

#### Exponenciális egyenletek

**1. típus: Ha rendezhető úgy az egyenlet, hogy mindkét oldalon egy-egy tag legyen.**

42. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket!

a)  $3^x = 9$ ;

b)  $2^x = 32$ ;

c)  $10^x = 1000$

d)  $4^x = 16$ ;

e)  $10^x = 0,001$ ;

f)  $3^x = \frac{1}{9}$ ;

g)  $25^x = 1$ ;

h)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ ;

i)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ ;

j)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ ;

k)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ ;

l)  $2^x = \sqrt{2}$ ;

m)  $5^x = \sqrt[3]{5}$ ;

n)  $5^x = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$ ;

o)  $2^x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ;

p)  $7^x = \frac{1}{\sqrt{7}}$ ;

q)  $2^{x+1} = 16$ ;

r)  $6^{x-3} = 36$ ;

s)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{7-x} = \frac{1}{27}$ ;

t)  $10^{6x-4} = 10\,000$ ;

u)  $4^{2-5x} - 1 = 0$ ;

v)  $5^{2-3x} - 24 = 1$

w)  $7^x = 0$

#### Exponenciális egyenletek

**2. típus: Ha nem rendezhető úgy az egyenlet, hogy mindkét oldalon csak egy-egy tag legyen.**

43. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket!

a)  $4^x + 4^{x+1} = 320$ ;

b)  $2^x + 2^{x-3} = 18$ ;

c)  $3^x - 3^{x-2} = 24$ ;

d)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

e)  $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$ ;

f)  $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ ;

g)  $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$ ;

h)  $2^x - 0,5^x = 3,75$ ;

i)  $9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 69 = 0$ ;

j)  $3^{4-x} + 3^{x-1} = 12$ ;

#### Exponenciális egyenletrendszerek

44. Tankönyv

## Logaritmus

45. Tankönyv 97. old. 1. a)–f); 2. a)–b)

## Logaritmusfüggvények

46. Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

a)  $f(x) = \log_2 x$ ;

b)  $f(x) = \log_3 x$ ;

c)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ;

d)  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

## A logaritmus azonosságai

47. Tankönyv

## Logaritmikusan egyenletek

48. Lásd tankönyv

## Logaritmikusan egyenletrendszerek

49. Lásd tankönyv

# IV. TRIGONOMETRIA

## Skaláris szorzat

### Szinusztétel

50. Egy háromszög két szöge  $40^\circ$ -os és  $65^\circ$ -os. A  $40^\circ$ -os szöggel szemközti oldal 8 cm. Számold ki a másik két oldalt!
51. Egy háromszög két oldala 5 cm és 7,3 cm. A 7,3 cm-es oldallal szemközti szög  $34^\circ$ -os. Mekkora a másik két szöge?
52. Egy háromszög két szöge  $32^\circ$  és  $55^\circ$ . A  $32^\circ$ -os szöggel szemben levő oldal 10 cm. Mekkora a többi oldal?
53. Egy háromszög egyik oldala 2 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek  $46^\circ$  és  $77,3^\circ$ . Mekkora az oldalak?
54. Egy háromszög egyik oldala 1 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek  $78,5^\circ$  és  $40^\circ 12'$ . Mekkora az oldalak?
55. Egy háromszög két oldala 13 cm és 15 cm. A 15 cm-rel szemközti szöge  $91^\circ 25'$ . Mekkora a többi szög és oldal?

### Koszinusztétel

56. Egy háromszög két oldala 10 m és 8 m. Közbezárt szögük  $75^\circ$ -os. Számítsd ki a harmadik oldalt!
57. Egy háromszög oldalai 4 cm, 6 cm és 7 cm. Mekkora a 7 cm-es oldallal szemközti szöge? Számítsd ki a többi szögét is!
58. Egy háromszög két oldala 7 cm és 9 cm, bezárt szögük  $93^\circ$ -os. Mekkora a harmadik oldal? Mekkora a másik két szög?
59. Egy paralelogramma átlói 10 és 17 cm-esek. Bezárt szögük  $100^\circ 45'$ . Mekkora a paralelogramma oldalai?
60. Egy háromszög oldalai 4 cm, 7 cm és 10 cm. Mekkora a legnagyobb szöge? Szögei szerint milyen típusú háromszög?

61. Egy paralelogramma átlói 3 m és 5 m-esek. A paralelogramma egyik oldala 2,2 m-es. Mekkora szöveget zárnak be az átlók?
62. Egy paralelogramma két oldala 4,25 cm és 11,5 cm hosszú. Az egyik átlója 9 cm-es. Mekkora a paralelogramma átlói?

### Trigonometrikus egyenletek

63. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):

a)  $\sin x = 0,5$

b)  $\sin x = -0,9$

c)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $\sin x = 1$

e)  $\sin x = 0$

f)  $\sin x = -1$

g)  $\sin x = 2$

h)  $\cos x = 0,5$

i)  $\cos x = -0,6$

j)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

k)  $\cos x = 1$

l)  $\cos x = 0$

m)  $\cos x = -1$

n)  $\cos x = -1,5$

o)  $\operatorname{tg} x = 0,7$

p)  $\operatorname{tg} x = -2,5$

q)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

r)  $\operatorname{tg} x = 1$

s)  $\operatorname{tg} x = 0$

t)  $\operatorname{tg} x = -1$

u)  $\operatorname{tg} x = -5$

v)  $\operatorname{ctg} x = 1,9$

w)  $\operatorname{ctg} x = -7,1$

x)  $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

y)  $\operatorname{ctg} x = 1$

z)  $\operatorname{ctg} x = 0$

aa)  $\operatorname{ctg} x = -1$

bb)  $\operatorname{ctg} x = -3$

64.  $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ;  $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ ;  $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$   
 $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ ;  $3\sin^2 x - \cos^2 x = 3$ ;  $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2$

## V. KOORDINÁTAGEOMETRIA

Javasolt megoldani a tankönyv kidolgozott példáit is! Ezek a példák a könyvben sárga téglalapba írva találhatók.

### *Pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek*

65. Adott az  $A(3; 2)$  és  $B(-4; -2)$  pont.

a) Add meg a  $\overrightarrow{AB}$  vektort koordinátáival!

b) Add meg az AB szakasz felezőpontját koordinátáival!

c) Add meg az AB szakasz hosszát!

d) Add meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az AC szakasz felezőpontja B pont legyen.

66. Adott az  $A(-1; 3)$  és  $B(5; -3)$  pont.

a) Add meg a  $\overrightarrow{BA}$  vektort koordinátáival!

b) Add meg az AB szakasz hosszát!

c) Add meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az BC szakasz felezőpontja A pont legyen.

67. Egy háromszög csúcsai  $A(3; 4)$ ,  $B(-5; 3)$ ,  $C(2; -1)$ .

a) Számold ki az  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  és  $\overrightarrow{CA}$  vektorok koordinátáit!

b) Számold ki az oldalak felezőpontjainak koordinátáit!

c) Számold ki az AB oldal harmadolópontjainak koordinátáit!

d) Számold ki az oldalak hosszát!

e) Írd fel az oldalak felezőmerőlegesének egyenletét!

f) Számold ki a felezőmerőlegesek metszéspontját! A háromszög melyik nevezetes pontja ez?

g) Írd fel a háromszög A csúcsán átmenő magasságának egyenletét!

h) Írd fel a háromszög oldalainak egyenletét!

i) Számold ki az BC oldal és a BC oldalhoz tartozó magasság metszéspontjának koordinátáit!

68. Adott az ABC háromszög. Csúcsai:  $A(5; 1)$ ,  $B(-2; 2)$ ,  $C(0; -3)$ .
- Add meg a B csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld  $m_b$ -vel!)
  - Add meg az AC oldal egyenletét! (Jelöld  $b$ -vel!)
  - Számold ki és add meg  $m_b$  és  $b$  metszéspontjának koordinátáit!
69. Adott az ABC háromszög. Csúcsai:  $A(-3; -1)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(3; -2)$ .
- Add meg a C csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld  $m_c$ -vel!)
  - Add meg az AB oldal egyenletét! (Jelöld  $c$ -vel!)
  - Számold ki és add meg  $m_c$  és  $c$  metszéspontjának koordinátáit!

### *Körök*

70. Ábrázold koordináta-rendszerben, majd írd fel annak a körnek az egyenletét, aminek középpontja (C) és sugara (r) a következők!
- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $C(4; 5)$ , $r = 3$ ;   | d) $C(2; 0)$ , $r = 10$ ; |
| b) $C(5; -7)$ , $r = 4$ ;  | e) $C(0; -1)$ , $r = 1$ ; |
| c) $C(-2; -3)$ , $r = 1$ ; | f) $C(0; 0)$ , $r = 2$    |
71. Határozzuk meg a következő egyenletekkel felírt körök középpontjának koordinátáit és sugarát! Ábrázoljuk a köröket!
- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ;  | e) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ ; |
| b) $(x - 2)^2 + (y - 1,5)^2 = 100$ | f) $x^2 + (y + 7)^2 = 64$ ;       |
| c) $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 1$ ;   | g) $x^2 + y^2 = 9$                |
| d) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$ ;   |                                   |

### *Kör és egyenes kölcsönös helyzete*

72. Adott az  $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$  egyenletű kör.
- Add meg koordinátaival a kör középpontját és sugarát!
  - Ábrázold a kört derékszögű koordináta-rendszerben!
  - Számold ki a körnek az  $x - y = -5$  egyenletű egyenessel alkotott közös pontjait!
73. Adott az  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$  egyenletű kör.
- Add meg koordinátaival a kör középpontját és sugarát!
  - Ábrázold a kört derékszögű koordináta-rendszerben!
  - Számold ki a körnek az  $y = x - 2$  egyenletű egyenessel alkotott közös pontjait!